

Modèles intégrables en mécanique  
statistique, l'équation de Yang-Baxter et  
groupes quantiques

Viet-Anh Nguyen & Julian Bitterwolf

14 décembre 2012

# Sommaire

<b>1</b>	<b>L'histoire des modèles solvables en mécanique statistique</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Deux modèles équivalents</b>	<b>3</b>
2.1	Le modèle de chaîne de spin XXZ de Heisenberg . . . . .	3
2.2	Le modèle de six-vertex . . . . .	4
2.2.1	Définition mathématique et signification physique . . . . .	4
2.2.2	L'état fondamental et le développement à basse température	6
2.3	La matrice de transfert et R-matrice . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Solvabilité et Symétrie. L'apparition des groupes quantiques et l'équation de Yang-Baxter</b>	<b>10</b>
3.1	Des hamiltoniens commutatifs . . . . .	10
3.2	L'équation de Yang-Baxter (YBE) . . . . .	10
3.3	La signification des figures ci-dessus . . . . .	12
3.4	Z-invariant réseau . . . . .	13
3.5	Groupe quantique . . . . .	14
<b>4</b>	<b>L'analyse mathématique de l'équation de Yang-Baxter</b>	<b>16</b>
4.1	Connexion avec la théorie des nœuds . . . . .	16
4.2	Gagner des R-matrices avec bialgèbres tressées . . . . .	19
<b>5</b>	<b>L'algèbre <math>U_q(\mathfrak{sl}(2))</math> et ses représentations</b>	<b>22</b>
5.1	Définition de et premières remarques sur $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ . . . . .	22
5.2	$U_q(\mathfrak{sl}(2))$ comme algèbre de Hopf . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>26</b>

## Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons trois sujets très liés : les modèles solvables en mécanique statistique, l'équation Yang-Baxter comme une équation universelle pour résoudre une classe de modèles très large et finalement le groupe quantique comme l'objet de symétries de ces modèles. Étant étudiants de mathématiques et physique, nous espérons que notre mémoire, à certaine limite réussirait à démontrer l'harmonie de ces deux disciplines. Notre but n'est pas de succomber aux détails techniques souvent très algébriques et compliquées de ces objets, mais de comprendre les principes les plus importants. Il y a deux idées principales qui nous ont guidé (et motivé) pour choisir ce sujet. L'idée première est la relation intime entre les lois de conservation et symétries, et la seconde est l'utilité incroyable des structures mathématiques abstraites en étudiant la nature.

# Chapitre 1

## L'histoire des modèles solvables en mécanique statistique

Les modèles solvables en mécanique statistique ont une histoire longue et fascinante. Par définition, ce sont les modèles dont les solutions peuvent être calculées explicitement. La phrase "calculer explicitement" devrait être comprise avec attention. En effet, cette phrase est assez ambiguë. Les deux modèles que nous allons présenter dans la suite ont une caractéristique commune, c'est qu'ils ont un nombre infini de quantités (ou parfois nommé "intégrales") conservée. Cela nous permettrait en principe de résoudre explicitement des équations. C'est ce sens du mot solvabilité dont nous voulons parler.

La première chose à parler de modèles solvables (ou plus généralement systèmes intégrables si on veut aussi prendre en compte les équations différentielles) est qu'ils sont des phénomènes atypiques. La règle générale est que des équations non linéaires ne sont pas nées pour être résolues exactement. La découverte des systèmes intégrables qui apparaissent naturellement en modélisant la nature était donc une grande surprise.

Le modèle le plus connu (et étudié) en mécanique statistique a été le modèle d'Ising. Le cas 1D est souvent donné comme exercice dans une classe de mécanique statistique. Pour ce cas, on peut effectuer des calculs exacts sans grande difficulté. Ces calculs étaient faits par Ising lui-même en 1925. Le résultat montre que il n'y pas de transition de phase en 1D. Le cas 2D est beaucoup plus difficile. Pendant 20 ans, des physiciens pouvaient seulement démontrer quelques résultats qualitatifs, dont notamment l'ordre asymptotique (Peirls 1936) et l'existence d'une température critique (Kramers and Wannier 1941).

En 1944, Lars Onsager a publié une article classique (et intriquée) dans laquelle il a calculé l'énergie libre exacte pour le champs extérieur nul. Les résultats de son article (en particulier, seule la possibilité de résoudre exactement le modèle d'Ising) ont ouvert un flux important de recherches sur ce modèle. Par

exemple, les quantités plus difficiles comme la fonction de corrélation et la magnétisation spontanée ont été calculé. Nous remarquons de plus que le modèle d'Ising fait la base pour une large part de la théorie générale des phénomènes critiques.

La situation pour les dimensions les plus hautes est différente. On a démontré que le modèle d'Ising, en général, ne peut PAS résolu exactement en ces dimensions (plus précisément il est démontré à être NP-complète, i.e. on croit que même l'ordinateur ne peut pas le résoudre nettement).

Dans son article, Onsager a mentionné une relation qui s'appelle l'équation "star-triangle". Cette équation apparait la première fois en théorie de circuits électriques décrivant l'équivalence entre un circuit d'étoile et un de triangle. L'importance de cette équation n'était pas pleinement constaté que trente ans plus tard par Baxter dans ses études sur des modèles de vertex (un des plus simples, le modèle de six-vertex sera présenté dans la suite). Il a généralisé l'équation "star-triangle" et obtenu les équations de Yang-Baxter (Yang a obtenu aussi ces équations par d'autres chemins).

Dans le chapitre suivant, nous introduisons deux modèles équivalents : le modèle de chaîne de spin XXZ de Heisenberg et le modèle de six-vertex. Ensuite, nous nous concentrons à la solution du modèle de six-vertex qui nous demande d'introduire le concept central de matrices de transfert. L'équation de Yang-Baxter apparaîtra naturellement. Finalement, l'effort de résoudre le modèle suggère un nouveau objet algébrique : des groupes quantiques en particulier l'algèbre noté  $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$  qui est l'équivalence quantique (plus précisément "la déformation quantique") de l'algèbre  $sl(2, \mathbb{C})$ . Ces groupes quantiques encodent des symétries de modèles solvables en mécanique statistique (en particulier celles qui ne peuvent pas être décrites par le concept classique de groupe). Les représentations de ces groupes peuvent alors nous munir une approche unifiée à l'ensemble de questions autour des systèmes intégrables en mécanique statistique.

# Chapitre 2

## Deux modèles équivalents

### 2.1 Le modèle de chaîne de spin XXZ de Heisenberg

Ce modèle est un des modèles les plus simples modélisant des phénomènes magnétiques. Il représente un système à réseau 1D dont chaque point est associé avec un spin quantique (i.e. un opérateur de spin, souvent un-demi). Nos hypothèses sur le hamiltonien de l'interaction expliqueront le nom du modèle.

La formulation mathématique du modèle est comme suit. Soit  $\mathbf{V} = \mathbb{C}v_+ \oplus \mathbb{C}v_-$  un espace vectoriel de deux dimensions avec la base  $\{v_+, v_-\}$ . Soient

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les matrices de Pauli qui agissent sur  $\mathbf{V}$ . Nous considérons le produit tensoriel infini des copiés  $\mathbf{V}_k$  de  $\mathbf{V}$  :  $\mathbf{U} = \otimes_{k=1}^{\infty} \mathbf{V}_k$  qui seront l'espace sur lequel un réseau 1D des opérateurs de spins agissent. Pour alléger la notation, nous notons  $\sigma_k^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) l'opérateur qui n'agit non-trivialement que sur  $\mathbf{V}_k$ . La notation rigoureuse est bien-sûr le produit tensoriel entre  $\sigma_k^\alpha$  avec les identités. L'interaction des spins sont supposée gouvernée par le hamiltonien XXZ suivant :

$$\mathcal{H}_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \Delta \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z)$$

Ici  $\Delta$  est un nombre réel. Nous nous restreindrons au cas  $\Delta < -1$ . Les propriétés de ce système sont différents dans trois régions  $\Delta < -1$ ,  $-1 < \Delta < 1$  et  $\Delta > 1$ . Nous ne détaillons pas cette différence. Les méthodes que nous allons discuter ne sont applicables que pour la région  $\Delta < -1$ .

Nous avons deux remarques immédiates sur le modèle. Première, nous avons supposé que c'est seulement les voisins qui interagissent. Seconde, le paramètre

$\Delta$ , si différent de 1, représente l'anisotropie de l'interaction suivant l'axe  $z$  par rapport aux axes  $x$  et  $y$ . Pourquoi l'anisotropie? Parce que dans le monde réel, il y a beaucoup de phénomènes qui privilègent une direction particulière. Par exemple, il y a des matériaux dont les propriétés magnétiques ne sont pas isotropes. Si  $\Delta = 1$ , le modèle est nommé XXX. Dans ce cas, le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  est un groupe de symétrie du hamiltonien. L'introduction d'un paramètre d'anisotropie brise cette symétrie. Pourtant, on peut revivre la symétrie du système par ajout d'un paramètre dans  $SL(2, \mathbb{C})$ . Cette action est décrite dans la partie mathématique de la mémoire.

Notre problème est de diagonaliser le hamiltonien et en exploiter pour calculer des fonctions thermodynamiques d'intérêt. D'une importance particulière, c'est les vecteurs du vide, i.e. les vecteurs propres qui correspondent aux valeurs propres les plus basses. De nombreuses questions se posent. Par exemple, comment ces états sont excités, ou quels sont les opérateurs qui les préservent?

On confronte immédiatement deux problèmes. Premièrement, ce n'est pas raisonnable d'espérer que l'on peut diagonaliser analytiquement un système si complexe comme celui-ci. En effet, avant le flot des résultats positifs sur la solvabilité exacte des systèmes de ce genre dans les années 70s, les physiciens connaissaient très peu de modèle solvable et physiquement intéressant (comme l'oscillateur harmonique par exemple). La raison ultime pour laquelle ces miracles ont lieu est la symétrie subtile (et bien cachée) de ces modèles. Des groupes quantiques sont un produit des efforts de démystifier ces miracles.

Le deuxième problème est plus fondamental : le modèle que l'on vient de formuler est de dimension infinie, comment peut-on proprement le comprendre? Nous avons vu en mécanique quantique que travailler en dimension infinie est non seulement plus subtile mais fondamentalement différent de travailler en dimension finie. La méthode usuelle de physiciens est de se restreindre en dimension finie avec des conditions aux bords appropriées (par exemple des conditions périodiques). Après trouver la solution pour ce cas, on étudiera son comportement lorsque la dimension tend vers l'infini (souvent en gardant certaines quantités dépendantes de  $N$  constantes).

## 2.2 Le modèle de six-vertex

### 2.2.1 Définition mathématique et signification physique

Ce modèle modélise un système (souvent un réseau d'atomes) bidimensionnel classique (plutôt que quantique comme la chaîne de Heisenberg). Pourtant, on verra que ce modèle et la chaîne de spins sont équivalents dans le sens qu'une

solution de l'un se traduit immédiatement en une de l'autre. La description mathématique avec la signification physique de ce modèle est la suivante.

Considérons un réseau carré  $M \times N$  dans le plan. En physique, c'est le réseau de Bravais du cristal. Rappelons nous que des matériaux dans la nature possèdent souvent une structure périodique, i.e. leurs atomes sont positionnés de façon invariante par translations (et peut-être par d'autres transformations). Autrement dit, des atomes d'un matériau font un réseau dans le sens mathématique.

Nous appelons l'intersection des deux lignes un **sommet** et le morceau qui joint deux sommets consécutifs un **bord**. Dans le contexte physique, des atomes se situent aux sommets et à chaque ligne qui joint deux sommets, on associe une quantité (un nombre ou probablement d'autres choses) qui exprime l'interaction entre deux atomes.

Pour simplifier le problème, nous supposons comme dans le modèle XXZ que la configuration est périodique. Le réseau est donc défini sur un tore plutôt que dans le plan.

Nous ferons l'hypothèse suivante sur des liaisons atomiques. Nous associons à chaque bord  $j$  un variable (de spin classique)  $\epsilon_j = \pm$ . Une **configuration**  $\mathcal{C}$  est une attribution des valeurs de spin à tous les bords. Il y a donc  $2^{MN}$  configurations en total.

Pour une configuration  $\mathcal{C}$  fixée, on associe à chaque sommet un poids  $R_{\epsilon_1 \epsilon_2}^{\epsilon'_1 \epsilon'_2}$  :

$$\begin{array}{c}
 \epsilon'_1 \\
 | \\
 \epsilon_2 \text{ --- } \text{---} \epsilon'_2 \\
 | \\
 \epsilon_1
 \end{array} \tag{2.1}$$

$$R_{++}^{++} = R_{--}^{--} = a, \tag{2.2}$$

$$R_{+-}^{+-} = R_{-+}^{-+} = b, \tag{2.3}$$

$$R_{-+}^{+-} = R_{+-}^{-+} = c, \tag{2.4}$$

$$R_{\epsilon_1 \epsilon_2}^{\epsilon'_1 \epsilon'_2} = 0 \quad \text{si } \epsilon'_1 + \epsilon'_2 \neq \epsilon_1 + \epsilon_2 \tag{2.5}$$



$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} + \\ | \\ + \leftarrow \text{---} \rightarrow + \\ | \\ + \end{array} & \begin{array}{c} + \\ | \\ - \leftarrow \text{---} \rightarrow - \\ | \\ + \end{array} & \begin{array}{c} + \\ | \\ + \leftarrow \text{---} \rightarrow - \\ | \\ - \end{array} \\
a & b & c \\
\begin{array}{c} - \\ | \\ - \leftarrow \text{---} \rightarrow - \\ | \\ - \end{array} & \begin{array}{c} - \\ | \\ + \leftarrow \text{---} \rightarrow + \\ | \\ - \end{array} & \begin{array}{c} - \\ | \\ - \leftarrow \text{---} \rightarrow + \\ | \\ + \end{array}
\end{array} \tag{2.6}$$

L'équation dernière exprime la conservation de spin suivant la direction nord-est et sud-ouest. Ensuite, nous attribuons à  $C$  un poids statistique

$$W(C) = \prod_{v \text{ sommets}} R_{\epsilon_1(C,v)\epsilon_2(C,v)}^{\epsilon'_1(C,v)\epsilon'_2(C,v)} \tag{2.7}$$

La fonction de partition est alors définie comme la somme des poids statistiques sur toutes les configurations possibles. Elle contient les propriétés les plus importantes sur le système. Notre but est de l'étudier (la calculer éventuellement).

### 2.2.2 L'état fondamental et le développement à basse température

On verra dans la section suivante que le modèle XXZ avec le paramètre d'anisotropie  $\Delta$  est équivalent au modèle de six-vertex avec les paramètres  $a,b,c$  si  $\Delta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ . La région d'intérêt  $\Delta < -1$  correspond à la condition  $c > a + b$ . Nous nous restreignons à ce cas et remarquons quelques points importants suivants :

1. La fonction de partition est un polynôme homogène de  $a,b,c$ . Sa signification physique reste la même si l'on normalise  $c=1$ . La relation ci-dessus entre  $a,b$  et  $c$  nous permet alors de considérer  $a,b$  comme les deux petits paramètres avec lesquels nous pouvons développer des quantités physiques à l'ordre souhaité. Cette technique s'appelle l'expansion (en séries) à

basse température. En effet, dans le contexte physique, on note souvent  $\alpha = \exp \frac{-E_\alpha}{kT}$ , avec  $\alpha = a, b, c$ ;  $E_\alpha$  l'énergie de configuration locale, et  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température. Si les énergies sont fixées, la limite  $T \rightarrow 0$  correspond exactement aux limites  $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \rightarrow 0$ .

2. Il y a exactement deux configurations qui maximisent le poids de Boltzmann (et donc minimisent l'énergie totale). Ce sont les configurations avec tous les sommets ayant la configuration  $c$ , i.e. les bords verticaux et horizontaux ont les valeurs alternatif  $\dots + - + - + - \dots$ . Fixons un bord de référence et notons  $C^\pm$  celle avec  $\epsilon_1 = (-1)^i (i = \pm)$ .
3. On dit qu'une configuration est dans le secteur positif (négatif) si elle a plus de bords identiques avec  $C^+$  ( $C^-$ ). Puisque le modèle est manifestement symétrique sous la réversion des spins, la fonction de partition est deux fois les contributions de chaque secteur. Dans toutes les calculs qui suivent, nous nous restreignons à un secteur,  $C^+$  par exemple.

Nous nous intéressons au comportement de  $Z_{MN}$  lorsque  $M, N \rightarrow \infty$ . Bien que  $Z$  soit divergente dans cette limite, on peut montrer que la quantité suivante converge

$$\kappa = \lim_{M, N \rightarrow \infty} Z_{MN}^{\frac{1}{MN}}$$

. Elle s'appelle la fonction partition par site.

**Théorème 1.** Soit  $L=MN$ , on a le développement suivant de  $Z_{M,N}$  :

$$\frac{1}{2} Z_{MN} = 1 + La^2b^2 + La^2b^2(a^2 + b^2) + \frac{L(L+1)}{2} a^4b^4 + La^2b^2(a^4 + b^4) + (2.8)$$

$$\kappa = 1 + a^2b^2 + a^2b^2(a^2 + b^2) + a^4b^4 + a^2b^2(a^4 + b^4) \dots (2.9)$$

Le résultat exact pour  $\kappa$  sera énoncé plus tard. L'avantage de ce développement est bien-sûr du côté calculatoire. Donnés  $a$  et  $b$  très petits, on peut approximer  $\kappa$  bien avec quelques premiers termes.

## 2.3 La matrice de transfert et R-matrice

Nous allons expliquer pourquoi le modèle de six-vertex est aussi un problème de valeurs propres par introduire l'outil important de matrice de transfert. L'idée est élémentaire : on juste essaye de trouver un ordre de sommer intelligent. Le tactique est de sommer d'abord les contributions pour une colonne et puis sommer les colonnes.

Considérons donc une colonne et fixons les configurations des bords horizontaux à ses deux côtés  $(\epsilon_1, \epsilon'_1), \dots, (\epsilon_N, \epsilon'_N)$ . Définissons le nombre suivant par sommer sur les bords verticaux de cette colonne :

$$T_{\epsilon_1 \dots \epsilon_N}^{\epsilon'_1 \dots \epsilon'_N} = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_N} R_{\nu_1 \epsilon_1}^{\nu_2 \epsilon'_1} R_{\nu_2 \epsilon_2}^{\nu_3 \epsilon'_2} \dots R_{\nu_N \epsilon_N}^{\nu_1 \epsilon'_N} \quad (2.10)$$

Nous rappelons que nous avons choisi la condition aux limites périodique. En considérant les indices  $\epsilon_j, \epsilon'_j$  comme les labels de la base de  $\mathbf{V} = \mathbb{C}v_+ \oplus \mathbb{C}v_-$ , nous pouvons définir T comme une matrice dans  $End(\mathbf{V}^{\otimes N})$ , i.e.

$$T(v_{\epsilon_1} \otimes \dots \otimes v_{\epsilon_N}) = \sum_{(\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N) \in \pm^N} T_{\epsilon_1 \dots \epsilon_N}^{\epsilon'_1 \dots \epsilon'_N} v_{\epsilon'_1} \otimes \dots \otimes v_{\epsilon'_N}$$

T est symétrique grâce aux conditions sur R-nombres de notre modèle.

$$\begin{array}{c}
 \nu_1 \\
 | \\
 V_N \quad \epsilon_N \text{ --- } \epsilon'_N \\
 | \\
 \text{---} \\
 | \\
 V_2 \quad \epsilon_2 \text{ --- } \epsilon'_2 \\
 | \\
 \nu_2 \\
 V_1 \quad \epsilon_1 \text{ --- } \epsilon'_1 \\
 | \\
 \nu_1 \\
 V_0
 \end{array} \quad (2.11)$$

La fonction de partition complète est obtenue par sommer sur toutes les colonnes en variant aussi des configurations des lignes horizontales. Mais sommer sur deux colonnes consécutives est équivalent à la multiplication des matrices T's. Prenant en compte la condition périodique aux bords, nous obtenons alors :

$$Z_M N = tr(T^M)$$

Le problème de calculer  $Z_M N$  se ramène donc bien à un problème de valeurs propres de T. Néanmoins, puisque T est une grande matrice, elle n'est guère un outil pratique. Il faut que l'on cherche un alternatif.

Pour compter la contribution (à la fonction de partition) d'un seul sommet, on utilise une matrice  $R \in (V \otimes V)$  définie par :

$$R(v_{\epsilon'_1} \otimes v_{\epsilon'_2}) = \sum_{\epsilon_1 \epsilon_2} v_{\epsilon_1} \otimes v_{\epsilon_2} R_{\epsilon_1 \epsilon_2}^{\epsilon'_1 \epsilon'_2} \quad (2.12)$$

Une telle matrice s'appelle une R-matrice. Elle est similaire à la matrice T qui compte la contribution d'une colonne. On peut définir une R-matrice sur un produit tensoriel de plus de 2 copies de V par ajout de sous-indices qui indiquent sur quels facteurs elle agit vraiment. Par exemple, si on écrit  $R = \sum a_i \otimes b_i$  avec  $a_i, b_i \in \text{End}(V)$  alors sur  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$  (rappelons que tous  $V_k$  sont copies de V), on a

$$R_{23} = \sum id \otimes a_i \otimes b_i$$

La connaissance sur R peut être traduite en celle sur T de façon suivante. Définissons la matrice de monodromie  $\mathcal{T}$  agissant sur le produit  $V_0 \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_N$  (avec  $V_k = V$ ) :

$$\mathcal{T} = R_{01} \dots R_{0N} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Ici chaque bloque est une matrice  $2^N \times 2^N$  et la division en bloque est effectuée dans le choix suivant de l'ordre des vecteurs de base : les tenseurs décomposables ayant pour le composant de  $V_0$   $v_+$  sont devant ceux qui ont  $v_-$ . Par exemple considérons  $V_0 \otimes V_1$ , une base qui satisfait notre ordre est  $v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_-, v_- \otimes v_-$  : ceux qui ont le premier composant  $v_+$  sont devant. La matrice de transfert est alors

$$T = A + D = \text{tr}_{V_0}(\mathcal{T}) \quad (2.14)$$

Cette égalité peut être vérifiée directement en utilisant la formule qui définit T. Nous avons juste besoin de noter que la sous-matrice A (respectivement D) de  $\mathcal{T}$  n'agit que sur les vecteurs dont le premier composant (i.e. celui de  $V_0$ ) est  $v_+$  (respectivement  $v_-$ ).

# Chapitre 3

## Solvabilité et Symétrie. L'apparition des groupes quantiques et l'équation de Yang-Baxter

### 3.1 Des hamiltoniens commutatifs

Une des caractéristiques des systèmes intégrables (classiques ou quantiques) est l'existence d'un grand nombre (éventuellement infini) de lois de conservation (qui conduit parfois aux systèmes surdéterminés, i.e. plus équations que variables).

On va voir qu'il existe une famille des matrices de transfert  $T(\zeta)$  t.q  $[T(\zeta), T(\zeta')] = 0 \forall \zeta, \zeta'$  pour le modèle de six-vertex et pour la chaîne de Heisenberg, une famille d'opérateurs mutuellement commutatifs  $\mathcal{H}_{XYZ} = \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots$ . Les deux modèles se relient par la relation

$$\mathcal{H}_n = cte. \left(\zeta \frac{d}{d\zeta}\right)^n \log T(\zeta) \Big|_{\zeta=1} \quad (3.1)$$

Cette relation exprime l'équivalence des deux modèles : connaître les valeurs propres de  $\mathcal{H}_n$  est équivalent à connaître celles de  $T(\zeta)$ , en principe.

### 3.2 L'équation de Yang-Baxter (YBE)

Commençons par l'astuce suivante qui consiste en paramétrer les poids de Boltzmann par trois nouveaux paramètres  $\kappa, \zeta, q$  :

$$a = \frac{1}{\kappa}, b = \frac{1}{\kappa} \frac{(1 - \zeta^2)q}{1 - q^2\zeta^2}, c = \frac{1}{\kappa} \frac{(1 - q^2)\zeta}{1 - q^2\zeta^2} \quad (3.2)$$

Bien-sûr, les  $a, b, c$  ne sont pas tous paramétrés de cette façon. La condition  $a + b < c$  est équivalent à  $(1 + q)(1 - \zeta)(1 + q\zeta) < 0$ . L'inégalité dernière se tient si  $0 < -q < \zeta < 1$ .

On remarque que le paramètre  $\kappa$  est juste une constante de proportionnel et il a lien avec la fonction de partition par site que nous avons mentionnée avant. Nous choisissons  $\kappa$  comme la fonction suivante de  $q$  et  $\zeta$  :

$$\kappa(\zeta) = \zeta \frac{(q^4 \zeta^2; q^4)_\infty (q^2 \zeta^{-2}; q^4)_\infty}{(q^4 \zeta^{-2}; q^4)_\infty (q^2 \zeta^2; q^4)_\infty} \quad (3.3)$$

avec  $(z, p) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - zp^n)$ .

On peut calculer facilement

$$\Delta \equiv \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{q + q^{-1}}{2} \quad (3.4)$$

Puisque  $\Delta$  est indépendant de  $\zeta$ ,  $\zeta$  peut être considéré comme une coordonné sur la variété  $(a : b : c) \in \mathbf{P}^2 \Delta = \text{cte}$ .  $\zeta$  est nommé le paramètre spectral, qui est très important dans la formulation générale des systèmes intégrables. On souvent fixe  $q$  et voit  $a, b, c, \kappa$  comme les fonctions de  $\zeta$ . La R-matrice s'écrit maintenant :

$$R(\zeta) = \frac{1}{\kappa(\zeta)} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{(1-\zeta^2)q}{1-q^2\zeta^2} & \frac{(1-q^2)\zeta}{1-q^2\zeta^2} & & \\ & \frac{(1-q^2)\zeta}{1-q^2\zeta^2} & \frac{(1-\zeta^2)q}{1-q^2\zeta^2} & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Pour  $q$  fixé,  $R(\zeta)$  satisfait les conditions suivantes :

– **Yang-Baxter equation** Dans  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$  on a :

$$R_{12}(\zeta_1/\zeta_2)R_{13}(\zeta_1/\zeta_3)R_{23}(\zeta_2/\zeta_3) = R_{23}(\zeta_2/\zeta_3)R_{13}(\zeta_1/\zeta_3)R_{12}(\zeta_1/\zeta_2) \quad (3.6)$$

$$\begin{array}{c} \zeta_3 \leftarrow \begin{array}{c} | \quad | \\ \hline | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ \zeta_2 \quad \zeta_1 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \hline | \quad | \\ \zeta_2 \quad \zeta_1 \end{array} \\ \zeta_3 \leftarrow \end{array} \end{array} \quad (3.7)$$

– **Condition initial**  $R(1) = P = \text{flip transformation}$   $P(u \otimes v) = v \otimes u$ .

– **Relation unitaire**  $R_{12}(\zeta_1/\zeta_2)R_{21}(\zeta_2/\zeta_1) = Id_{V_1 \otimes V_2}$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \hline
 \hline
 \zeta_2 \leftarrow \hline
 \downarrow \zeta_1
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{c}
 \swarrow \\
 \zeta_2 \\
 \searrow \\
 \zeta_1
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{3.8}$$

– **Symétrie crossing**  $R(\zeta_2/\zeta_1)_{\epsilon_2 \epsilon_1}^{\epsilon'_2 \epsilon'_1} = R(-q^{-1}\zeta_1/\zeta_2)_{-\epsilon_1 \epsilon_2}^{-\epsilon'_1 \epsilon'_2}$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \zeta_2 \quad \epsilon_2 \leftarrow \begin{array}{c} \uparrow \epsilon'_1 \\ \hline \epsilon'_2 \end{array} \\
 \downarrow \epsilon_1 \\
 \zeta_1
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{c}
 \zeta_2 \quad \epsilon_2 \leftarrow \begin{array}{c} \downarrow -\epsilon'_1 \\ \hline \epsilon'_2 \end{array} \\
 \downarrow -\epsilon_1 \\
 -q^{-1}\zeta_1
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{3.9}$$

Pour que les trois dernières équations soient écrites exactement comme ci-dessus, c'est à dire sans besoin d'ajouter des facteurs scalaires, il faut et suffit que  $\kappa$  satisfasse

$$\kappa(1) = 1, \kappa(\zeta)\kappa(\zeta^{-1}) = 1, \text{ et } \frac{\kappa(-q^{-1}\zeta)}{\kappa(\zeta^{-1})} = \frac{(1 - q^{-2}\zeta^2)q}{1 - \zeta^2}$$

Il y a plusieurs solutions  $\kappa(\zeta)$  parmi lesquelles notre formule écrite ci-dessus. Cette formule donne l'unique solution analytique dans le domaine  $q^2 \leq |\zeta^2| \leq q^{-2}$ . Elle coïncide aussi avec le résultat exact pour la fonction de partition par site du modèle de six-vertex avec la normalisation  $a=1$ . Autrement dit, avec le choix (3.2), la fonction de partition par site est simplement 1.

### 3.3 La signification des figures ci-dessus

Nous expliquons tout d'abord comment les équations et les figures ci-dessus se correspondent. Ca nous permettra de comprendre de façon plus conceptuelle ces équations.

Quand nous étudions la R-matrice  $R(\zeta)$ , c'est plus confortable d'associer deux paramètres indépendants  $\zeta_1, \zeta_2$  à chaque composant du produit tensoriel  $V_1 \otimes V_2$  et considérer  $R(\zeta) = R(\zeta_1/\zeta_2)$ . Le poids de Boltzmann est représenté comme dans l'image suivante, où  $\zeta_1$  correspond à la colonne et  $\zeta_2$  à la ligne.

$$\begin{array}{ccc}
 & \epsilon'_1 & \\
 & | & \\
 \zeta_2 \epsilon_2 & \leftarrow & \epsilon'_2 \\
 & | & \\
 & \epsilon_1 \zeta_1 & 
 \end{array} \tag{3.10}$$

Nous associons aussi 2 flèches (arrows) à la ligne et la colonne. En position normale, la colonne est vers le bas et la ligne vers la gauche. On a souvent besoin de faire tourner des figures pour les voir plus aisément. Voici comment on comprend la représentation géométrique de l'équation de Yang-Baxter par exemple. Avec notre convention de flèches down-left, il y a effectivement seulement trois matrices possibles :  $R_{12}, R_{13}$  et  $R_{23}$  (on devrait faire tourner les images pour connaître down-left à chaque point d'intersection !). L'équation de Yang-Baxter montre une certaine commutativité entre ces 3 matrices.

### 3.4 Z-invariant réseau

L'idée d'associer les paramètres spectraux indépendants à chaque ligne (verticale et horizontale) nous conduit aux modèles in-homogènes et est (un peu paradoxalement) très important en l'étude des modèles homogènes comme notre six-vertex. Ceci est souligné par Baxter dans ses travaux. Pour notre six-vertex, si nous associons un paramètre  $\zeta_V^{(i)}$  à une ligne verticale i-ème et un paramètre  $\zeta_H^{(j)}$  à une ligne horizontale j-ème, nous obtiendrons un modèle in-homogène. Nous en utilisons pour démontrer la commutativité des matrices  $T(\zeta)$  annoncé au début du chapitre "Solvabilité".

Soit  $\mathcal{T}_0(\zeta | \zeta_H^{(1)}, \dots, \zeta_H^{(N)}) = R_{01}(\zeta/\zeta_H^{(1)}) \dots R_{0N}(\zeta/\zeta_H^{(N)})$  la matrice de monodromie du modèle in-homogène considérée comme un opérateur sur  $V_0 \otimes V_{0'} \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_N$  qui agit trivialement sur  $V_{0'}$ . Définissons par analogie  $\mathcal{T}_{0'}(\zeta')$  agissant trivialement sur  $V_0$ .

L'équation de Yang-Baxter peut être comprise comme une relation de conjugaison :  $R_{13}R_{23}$  et  $R_{23}R_{13}$  sont conjugués par  $R_{12}$ .

On a

$$\mathcal{T}_0(\zeta)\mathcal{T}_{0'}(\zeta') = [R_{01}(\zeta/\zeta_H^{(1)})R_{0'1}(\zeta'/\zeta_H^{(1)})] \dots [R_{0N}(\zeta/\zeta_H^{(N)})R_{0'N}(\zeta'/\zeta_H^{(N)})]$$



L'YBE nous dit que

$$R_{00'}(\zeta/\zeta')R_{0j}(\zeta/\zeta_H^{(j)})R_{0'j}(\zeta/\zeta_H^{(j)})R_{00'}(\zeta/\zeta')^{-1} = R_{0'j}(\zeta/\zeta_H^{(j)})R_{0j}(\zeta/\zeta_H^{(j)})$$

Donc, on obtient finalement

$$R_{00'}(\zeta/\zeta')\mathcal{T}_0(\zeta)\mathcal{T}_{0'}(\zeta')R_{00'}(\zeta/\zeta')^{-1} = \mathcal{T}_{0'}(\zeta')\mathcal{T}_0(\zeta) \quad (3.11)$$

Prenons la trace sur  $V_0 \otimes V_{0'}$ , nous obtenons exactement la commutativité entre  $T(\zeta)$  et  $T\zeta'$ . La figure ci-dessous illustre cette commutativité :

$$(3.12)$$

L'une est obtenue de l'autre par faire glisser deux lignes  $\zeta, \zeta'$  travers elles-même (through each other). Or la fonction de partition peut être démontré invariante par cette transformations (glissement). Un modèle comme notre six-vertex inhomogène qui possède cette symétrie est donc nommé Z-invariant.

Une autre remarque est la similarité remarquable entre ces images et des tresses (braids). Nous présenterons brièvement ces dernier objets dans un chapitre mathématique, comme un outil pour construire des R-matrices (i.e. des solutions de l'YBE).

### 3.5 Groupe quantique

Bien que l'importance de R-matrices et l'YBE soit plus ou moins claire en ce moment, on a encore l'impression que l'on n'a pas vraiment compris ces objets.

Ce qui nous manque est un cadre mathématique où ils sont nés naturellement. Les mathématiciens et physiciens (Faddeev, Drinfeld, Jimbo,...) ont trouvé une telle structure mathématique dans les années 80's. Drinfeld l'a nommé "groupe quantique". Ce nom n'est pas très précis parce qu'en réalité, un groupes quantiques n'est pas un groupe mais plutôt une algèbre de Hopf. En outre de la mécanique statistique, des groupes quantiques sont liés à un grand spectre de sujets importants en physique et mathématiques.

Dans ce cadre, une classe de R-matrices sont des opérateurs d'entrelacement associés aux représentations de groupes quantiques. En particulier pour le modèle de six-vertex, c'est l'algèbre affine quantique  $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$  qui intervient. Nous n'allons pas préciser qu'est-ce que c'est  $\hat{\mathfrak{sl}}_2$  à cause de sa complexité considérable. De plus, ce travail n'est pas urgent pour comprendre l'ensemble d'idées principales qui relie nos 3 sujets : des modèles intégrable, l'équation de Yang-Baxter et des groupes quantiques.

Dans la partie mathématique, nous traitons donc plutôt l'algèbre  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  qui est plus simple mais contient déjà quelques éléments importants de la théorie de représentations de groupes quantiques. L'importance pour les débutants comme nous, nous croyons, est de réaliser des similarités et des différences principales entre cette théorie et la théorie classique. Nous présentons aussi seulement la théorie mathématique simplifiée de l'YBE (i.e. sans paramètre spectral).

# Chapitre 4

## L'analyse mathématique de l'équation de Yang-Baxter

**Définition 1** (Équation de Yang-Baxter, R-Matrix). Soit  $V$  un espace vectoriel et  $c$  un automorphisme de  $V \otimes V$ .  $c$  satisfait l'équation de Yang-Baxter, si

$$(c \otimes \mathbb{1}_V)(\mathbb{1}_V \otimes c)(c \otimes \mathbb{1}_V) = (\mathbb{1}_V \otimes c)(c \otimes \mathbb{1}_V)(\mathbb{1}_V \otimes c). \quad (4.1)$$

Un  $c$  satisfaisant l'équation de Yang-Baxter est nommé une R-Matrice pour  $V$ .

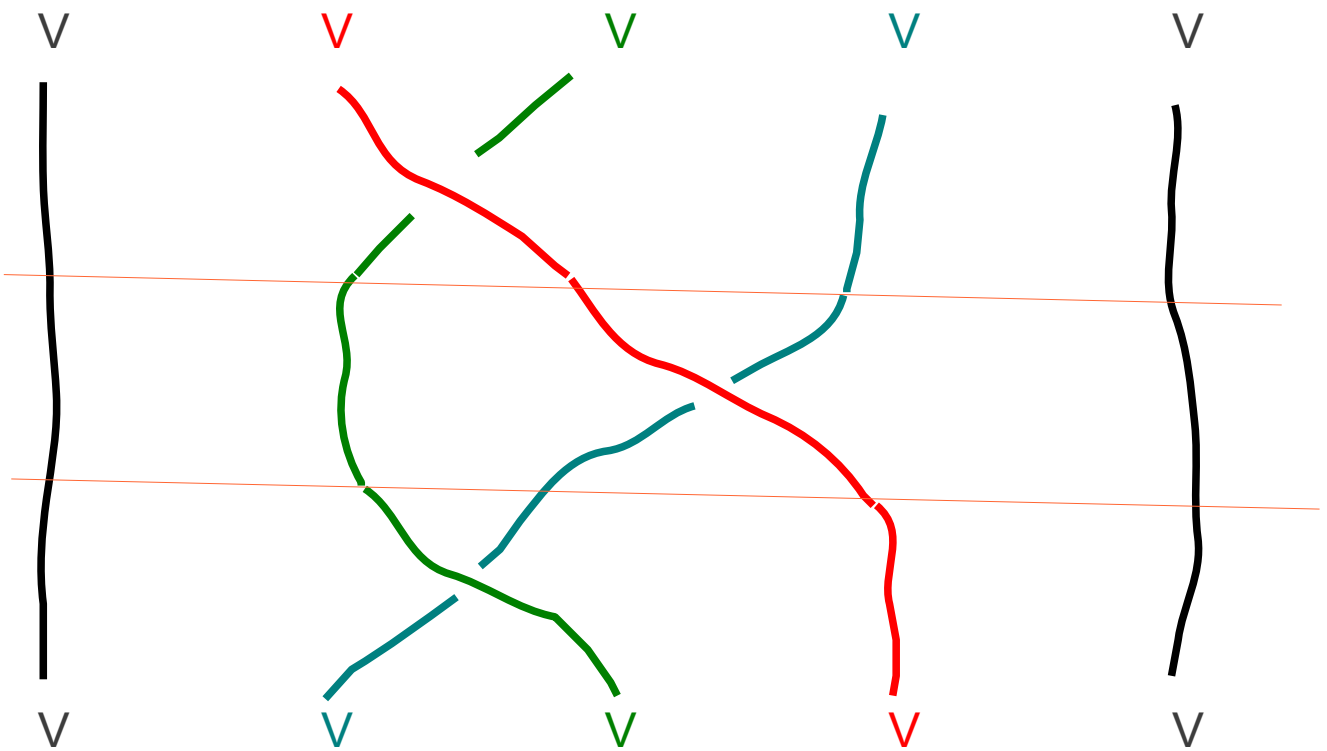
Avec l'objectif de trouver des R-matrices, nous nous concentrons sur une méthode qui utilise des tressages.

### 4.1 Connexion avec la théorie des nœuds

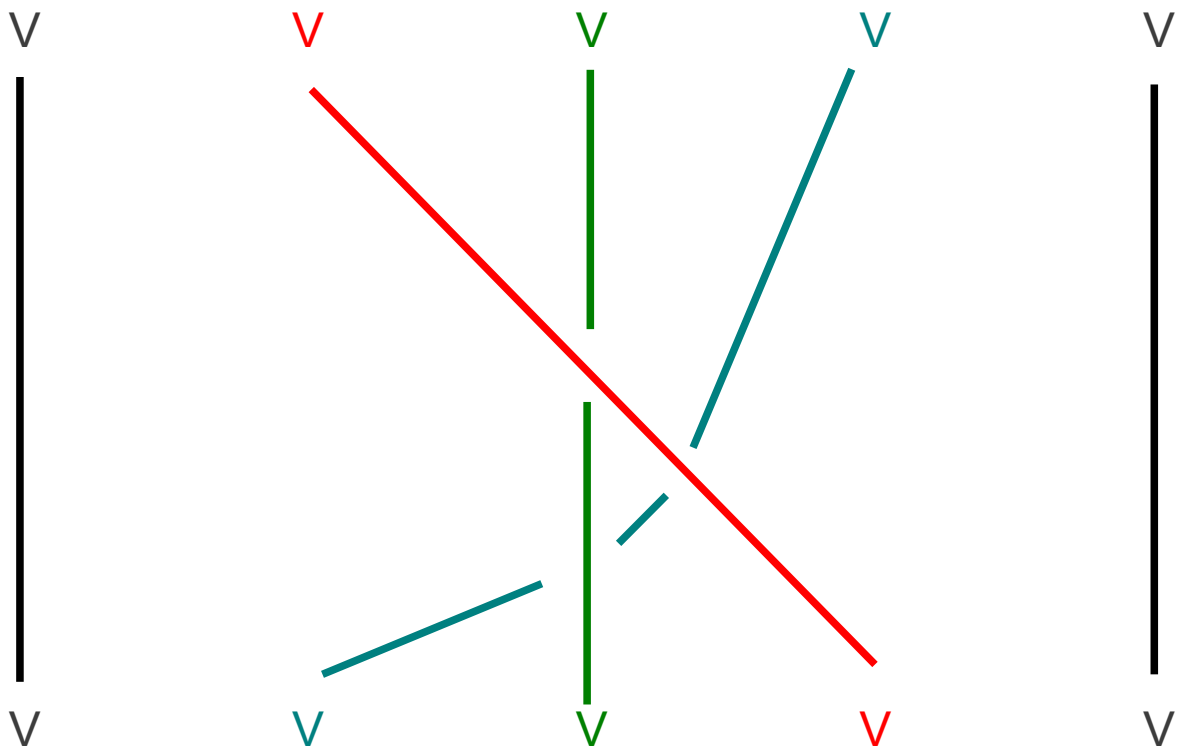
Si on a un produit tensoriel de plusieurs copies de  $V$ , on peut alors regarder l'application de  $c$  à un point de la chaîne comme un interchangement local qui interagit seulement avec les  $c$  aux points du voisinage.

Quand on essaye de dessiner les morphismes comme lignes qui vont du haut vers le bas et le morphisme  $c$  comme un carrefour où la ligne qui vient de la droite passe par dessous de l'autre, on gagne pour une R-matrice l'égalité des situations qui sont montrées dans les images dans les deux pages suivantes :

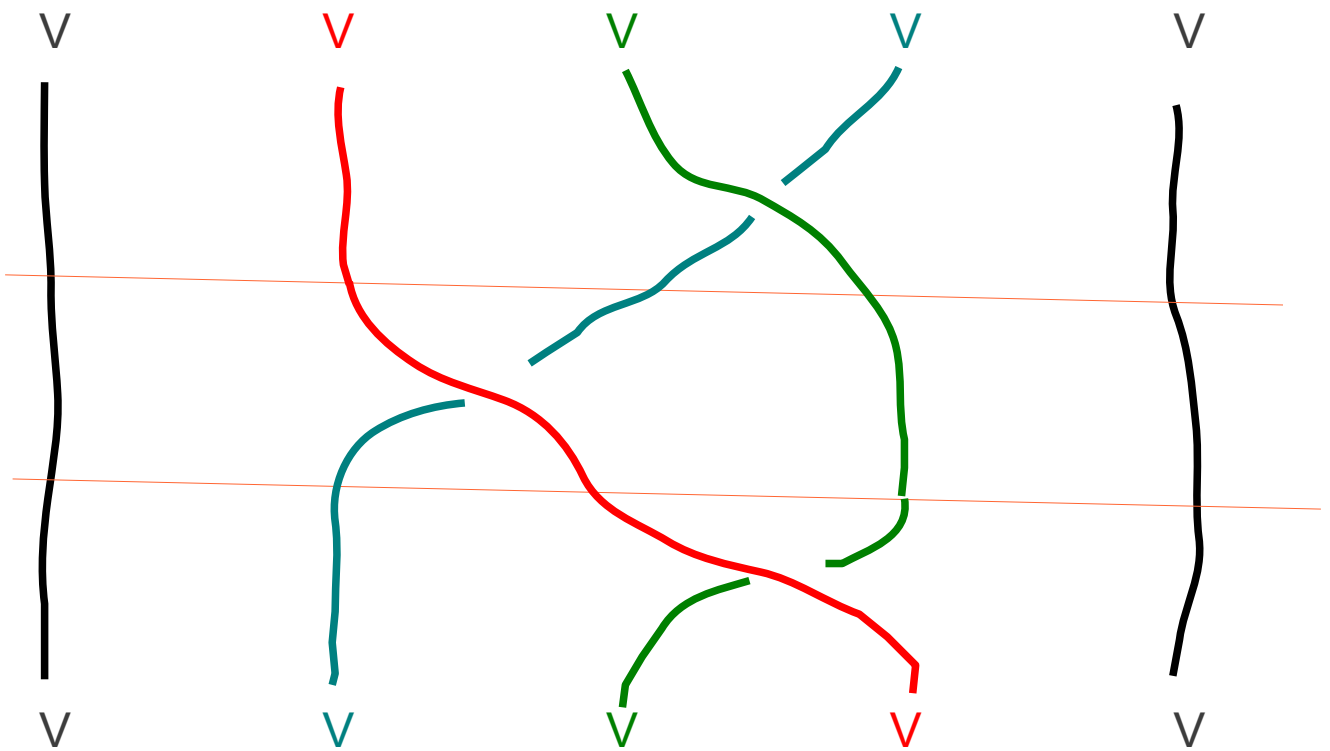
$$(\text{Id} \otimes c)(c \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes c)$$



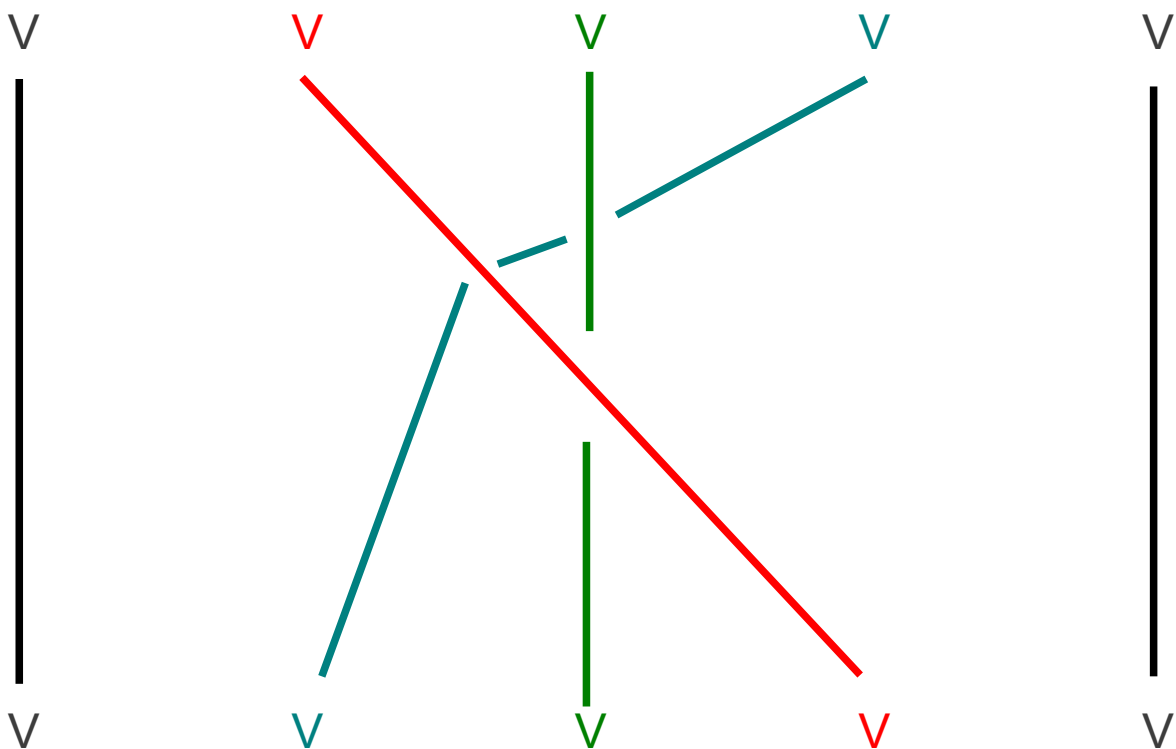
ou, plus schématiquement:



$$(c \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes c)(c \otimes \text{Id})$$



ou, plus schématiquement:



En regardant les images, notons que la propriété de  $c$  est pareil avec les transformations qu'on pourrait faire si les morphismes étaient cordes qui sont fixes aux objets  $V$  et qu'on peut bouger dans l'espace de trois dimensions. Il vient du fait qu'il y a des connexions très fortes entre la théorie des groupes quantiques et la théorie des nœuds.

On peut définir le groupe des  $n$ -tresses qui se compose des classes d'isotopie des configurations de  $n$  trajets dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]$  qui connectent les points  $(i, 0, 1), i = 1, \dots, n$  et  $(i, 0, 0), i = 1, \dots, n$  bijectivement. La composition dans ce groupe est donnée par coller  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times 0$  de la première tresse avec  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times 1$  de la seconde.

Ça peut être généralisé à la catégorie des tangles qui a comme objets les séquences finies dans  $\{\pm 1\}$  sur une ligne horizontale et comme morphismes entre deux séquences les familles de chemins orientés qui commencent à un  $-1$  et finissent à un  $+1$  tel que tout  $\pm 1$  a exactement un chemin. Juxtaposer les tangles définit un produit tensoriel dans cette catégorie.

Finalement on regarde des morphismes spéciaux dans la catégorie des tangles qui permettent de bien manipuler les produits tensoriels. Avec ça et une axiomatisation des propriétés de cette catégorie on gagne la notion d'une "catégorie ruban". Avec ça, on peut après tout construire des tressations et avec ça, comme nous allons discuter ci-dessous, des solutions de l'équation de Yang-Baxter des foncteurs d'une catégorie ruban dans la catégorie des modules.

Tout ça demande trop des objets nouveaux pour être discuté en détail dans ce mémoire. Alors nous décrivons principalement les choses qu'on doit connaître quand on a déjà une tressation dans son algèbre sur laquelle on regarde les modules.

## 4.2 Gagner des R-matrices avec bialgèbres tressées

On peut formuler la définition d'une algèbre sur le corps  $\mathbb{C}$  avec le produit tensoriel. Nous supposons que le lecteur est familier avec les produits tensoriels d'espaces vectoriels. Pour deux espaces vectoriels  $U$  et  $V$  on a l'isomorphisme de changement

$$\tau_{U,V} : U \otimes V \longrightarrow V \otimes U \quad , \quad \sum u \otimes v \longmapsto \sum v \otimes u . \quad (4.2)$$

**Définition 2** (Algèbre). *Une algèbre  $(A, \mu, \eta)$  est un espace vectoriel  $A$  muni d'une « multiplication »*

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A \quad (4.3)$$

*et une « unité »*

$$\eta : \mathbb{C}^1 \longrightarrow A \quad (4.4)$$

qui satisfont les axiomes d'associativité et d'unité, exprimés avec la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes \mathbb{1}_A} & A \otimes A \\
 \downarrow \mathbb{1}_A \otimes \mu & & \downarrow \mu \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^1 \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes \mathbb{1}_A} & A \otimes A & \xleftarrow{\mathbb{1}_A \otimes \eta} & A \otimes \mathbb{C}^1 \\
 \searrow & & \downarrow \mu & & \swarrow \\
 & & A & & 
 \end{array}
 \quad (4.5)$$

On appelle l'algèbre commutative si  $\mu \tau_{A,A} = \mu$ . Nous écrivons aussi  $a \cdot b$  pour  $\mu(a \otimes b)$ . Un morphisme entre deux algèbres  $f : (A_1, \mu_1, \eta_1) \rightarrow (A_2, \mu_2, \eta_2)$  est une application d'espaces vectoriels  $A_1 \rightarrow A_2$  avec

$$f \mu_1 = \mu_2(f \otimes f) \quad \text{et} \quad f \eta_1 = \eta_2. \quad (4.6)$$

Le produit tensoriel entre deux algèbres est le produit tensoriel des espaces vectoriels muni du produit tensoriel des multiplications et, respectivement, des unités.

On gagne la notion d'une coalgèbre en inversant les flèches dans les axiomes pour une algèbre :

**Définition 3 (Coalgèbre).** Une coalgèbre  $(C, \Delta, \epsilon)$  est un espace vectoriel  $C$  muni d'une « comultiplication »

$$\Delta : C \rightarrow C \otimes C \quad (4.7)$$

et une « counité »

$$\eta : C \rightarrow \mathbb{C}^1 \quad (4.8)$$

qui satisfont les axiomes de coassociativité et de counité, exprimés avec la commutativité des diagrammes suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\Delta \otimes \mathbb{1}_C} & C \otimes C \\
 \uparrow \mathbb{1}_C \otimes \Delta & & \uparrow \Delta \\
 C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^1 \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes \mathbb{1}_C} & C \otimes C & \xrightarrow{\mathbb{1}_C \otimes \epsilon} & C \otimes \mathbb{C}^1 \\
 \searrow & & \uparrow \Delta & & \swarrow \\
 & & C & & 
 \end{array}
 \quad (4.9)$$

On appelle la coalgèbre commutative, si  $\tau_{C,C} \Delta = \Delta$ .

Un morphisme entre deux coalgèbres  $f : (C_1, \Delta_1, \epsilon_1) \rightarrow (C_2, \Delta_2, \epsilon_2)$  est une application d'espaces vectoriels  $A_1 \rightarrow A_2$  avec

$$(f \otimes f) \Delta_1 = \Delta_2 f \quad \text{et} \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 f \quad (4.10)$$

Pour définir le produit tensoriel, il faut utiliser le changement  $\tau$  : Le produit tensoriel de  $(C_1, \Delta_1, \epsilon_1)$  et  $(C_2, \Delta_2, \epsilon_2)$  est  $C_1 \otimes C_2$  avec  $(\mathbb{1}_C \otimes \tau_{C_1, C_2} \otimes \mathbb{1}_C)(\Delta_1 \otimes \Delta_2)$  comme comultiplication et  $\epsilon_1 \otimes \epsilon_2$  comme counité.

**Définition 4 (Bialgèbre).** Une bialgèbre (ou bigèbre)  $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$  est un espace vectoriel  $B$  tel que  $(B, \mu, \eta)$  est une algèbre et  $(B, \Delta, \epsilon)$  est une coalgèbre, et tel que  $\Delta$  et  $\epsilon$  sont morphismes d'algèbres. (On voit que la dernière assertion est équivalente à demander que  $\mu$  et  $\eta$  soient morphismes de coalgèbres.)

Un morphisme de bialgèbres est une application qui est à la fois un morphisme des algèbres et un morphisme des coalgèbres.

**Définition 5 (Algèbre de Hopf).** Soit  $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$  une bialgèbre et  $S$  un endomorphisme de  $B$ . Nous appelons  $S$  un antipode, si

$$\mu(S \otimes Id)\Delta = \eta\epsilon = \mu(Id \otimes S)\Delta. \quad (4.11)$$

Si  $S$  est un antipode, on appelle  $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$  une algèbre de Hopf.

**Définition 6 (Bialgèbres quasico-commutatives et tressées).** Une bialgèbre quasico-commutative  $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, R)$  est une bialgèbre  $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$  avec un élément inversible  $R \in B \otimes B$  tel que

$$\forall b \in B : \tau_{B,B}\Delta(b) = R \cdot \Delta(b) \cdot R^{-1}. \quad (4.12)$$

Ça veut dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta} & B \otimes B \\ \downarrow \Delta & & \searrow (\mu \otimes \mu(R \otimes -)) \\ B \otimes B & & B \otimes B \\ & \searrow \tau_{B \otimes B} & \swarrow (\mu \otimes \mu(- \otimes R^{-1})) \\ & & B \otimes B \end{array} \quad (4.13)$$

Cet élément  $R$  est appelé la  $R$ -matrice universelle de la bialgèbre quasico-commutative.

Pour  $d = \sum a_i \otimes b_i \in B \otimes B$  et  $x, y \in 1, 2, 3, x \neq y$ , on définit  $d_{xy} \in B \otimes B \otimes B$  comme l'élément avec  $a_i$  à la  $x$ -ième et  $b_i$  à la  $y$ -ième position et 1 à la position qui reste. Par exemple on a  $d_{32} = \sum 1 \otimes b_i \otimes a_i$

Une bialgèbre quasico-commutative  $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, R)$  est appelée tressée, si les équations suivantes sont satisfaites :

$$(\mathbb{1}_B \otimes \Delta)(R) = R_{13} \cdot R_{12} \text{ et } (\Delta \otimes \mathbb{1}_B)(R) = R_{13} \cdot R_{23} \quad (4.14)$$

Par exemple, chaque bialgèbre cocommutative est tressée.

Quand on a une bialgèbre tressée  $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, R)$  et un  $B$ -module  $V$ , on définit l'automorphisme  $c^R$  par

$$c^R(v_1 \otimes v_2) = \tau_{V,V}(R(v_1 \otimes v_2)). \quad (4.15)$$

On peut montrer que  $c^R$  est une solution de l'équation de Yang-Baxter pour  $V$ , ça veut dire que quand  $B$  est tressée, tout  $B$ -module a une  $R$ -matrice.



# Chapitre 5

## L'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ et ses représentations

Soit  $q \in \mathbb{C}^\times, |q| \neq 1$  un nombre fixé. Donnée une algèbre de Lie  $L$ , on peut l'associer l'algèbre enveloppée  $U(L)$  qui admet utiliser la théorie des algèbres pour explorer les représentations de  $L$ . Les représentations irréductibles de  $L$  sont en correspondance avec les  $U(L)$ -modules simples, i.e. les modules sans sous-module propre. Pour  $L = \mathfrak{sl}$ ,  $U(\mathfrak{sl}(2))$  est engendrée par trois éléments  $X, Y, H$  avec les relations  $[X, Y] = H$ ,  $[H, X] = 2X$  et  $[H, Y] = -2Y$ . Le concept suivant de l'algèbre  $U_q$  peut être vue comme une généralisation de la théorie de  $\mathfrak{sl}(2)$  qui va s'approcher au cas classique pour  $q \rightarrow 1$ . La plupart de propositions qui sont valides pour  $U(\mathfrak{sl}(2))$  ont un analogue pour le cas quantique. Les preuves sont toujours similaires à celles du cas classique, mais il faut souvent faire des calculations élémentaires mais longues pour démontrer des équations simples. Ce travail n'est pas vraiment intéressant. Nous nous concentrons donc à la description des définitions et résultats qu'on a finalement besoin dans les applications physiques.

### 5.1 Définition de et premières remarques sur $U_q(\mathfrak{sl}(2))$

**Définition 7** ( $U_q$ ). La  $\mathbb{C}$ -algèbre  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  est définie par les générateurs

$$E, F, K, K^{-1} \tag{5.1}$$

et les relations

$$K^{-1}K = KK^{-1} = 1 \quad (5.2)$$

$$KE = q^2EK \quad (5.3)$$

$$KF = q^{-2}FK \quad (5.4)$$

$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \quad (5.5)$$

Nous écrivons  $U_q$  pour  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ .

Notre but est de trouver les  $U_q$ -modules simples.

Soit  $V$  un  $U_q$ -module de  $\mathbb{C}$ -dimension finie et soit  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  une valeur propre de  $K$  et  $V^\lambda = \{v \in V \mid Kv = \lambda v\}$  l'espace propre pour  $\lambda$ . On appelle  $\lambda$  un poids de  $V$ . Pour  $v \in V^\lambda$  on a  $KEv = q^2EKv = q^2\lambda Ev$ , alors  $EV^\lambda \subseteq V^{q^2\lambda}$ ; on a de même  $FV^\lambda \subseteq V^{q^{-2}\lambda}$ . Un vecteur  $0 \neq v \in V^\lambda$  avec  $Ev = 0$  est appelé vecteur de poids maximal  $\lambda$ . Si  $V$  est engendré comme  $U_q$ -module par un vecteur de poids maximal  $\lambda$  on appelle  $V$  module de poids maximal  $\lambda$ .

$V$  a un vecteur de poids maximal : Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos et  $K \neq 0$ , il y a un poids  $\lambda$ . Soit  $0 \neq v \in V^\lambda$ . Comme  $E^n \lambda \in V^{nq^2}$  et  $V$  est de dimension finie, il y a un  $n$  avec  $V^{nq^2} = \{0\}$  et alors un  $m$  avec  $0 = E^{m+1}v = EE^m v, E^m v \neq 0$ ; c'est un vecteur de poids maximal.

**Théorème 2.** Soit  $V$  engendré comme  $U_q$ -module par un vecteur de poids maximal  $\lambda$  avec  $\dim(V) = n + 1$ . Alors :

1.  $V$  est simple.
2. Il existe  $\epsilon \in \{1, -1\}$  tel que  $\lambda = \epsilon q^n$ .
3.  $K$  est diagonalisable avec les valeurs propres  $\epsilon q^{-n}, \epsilon q^{-(n-2)}, \dots, \epsilon q^{n-2}, \epsilon q^n$ .
4. Le vecteur de poids maximal est unique à multiplication avec un scalaire près.

Chaque  $U_q$ -module simple est engendré par un vecteur de poids maximal, qui détermine le module simple près à isomorphe près.

On peut en conclure qu'il existe exactement un tel  $U_q$ -module simple de dimension  $n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ; on l'appelle  $V_n$ .

On peut en plus montrer que pour un  $\lambda$  arbitraire le "Module de Verma"  $V(\lambda)$  défini comme l'espace vectoriel de dimension  $\aleph_0$  des polynomes  $\mathbb{C}[X]$  avec

$$KX^p = \lambda q^{-2p} X^p \quad (5.6)$$

$$K^{-1}X^p = \lambda^{-1} q^{2p} X^p \quad (5.7)$$

$$EX^{p+1} = \frac{q^{-p}\lambda - q^p\lambda^{-1}}{q - q^{-1}} X^p \quad (5.8)$$

$$E1 = 0 \quad (5.9)$$

$$FX^p = [p + 1] X^{p+1} \quad (5.10)$$

est un module de poids maximal  $\lambda$ .

## 5.2 $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ comme algèbre de Hopf

**Définition 8.** Nous définissons une comultiplication, une counité et un antipode pour donner  $U_q$  la structure d'une algèbre de Hopf comme suivant sur la base :

$$\Delta(1) := 1 \quad (5.11)$$

$$\Delta(K) := K \otimes K \quad (5.12)$$

$$\Delta(K^{-1}) := K^{-1} \otimes K^{-1} \quad (5.13)$$

$$\Delta(E) := 1 \otimes E + E \otimes K \quad (5.14)$$

$$\Delta(F) := F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F \quad (5.15)$$

$$\epsilon(1) := 1 \quad (5.16)$$

$$\epsilon(K) := 1 \quad (5.17)$$

$$\epsilon(K^{-1}) := 1 \quad (5.18)$$

$$\epsilon(E) := 0 \quad (5.19)$$

$$\epsilon(F) := 0 \quad (5.20)$$

$$\epsilon(1) := 1 \quad (5.21)$$

$$S(K) := K^{-1} \quad (5.22)$$

$$S(K^{-1}) := K \quad (5.23)$$

$$S(E) := -EK^{-1} \quad (5.24)$$

$$S(F) := -KF \quad (5.25)$$

Le preuve du fait qu'on a défini une algèbre de Hopf consiste seulement d'écrire les relations nécessaires et d'utiliser quelques équivalences élémentaires. Par exemple, quand on démontre que  $\Delta$  est un morphisme d'algèbres, on calcule que

$$\begin{aligned} \Delta(K)\Delta(E)\Delta(K^{-1}) &= (K \otimes K)(1 \otimes E + E \otimes K)(K^{-1} \otimes K^{-1}) \\ &= 1 \otimes KEK^{-1} + KEK^{-1} \otimes K \\ &= q^2(1 \otimes E + E \otimes K) \\ &= q^2\Delta(E) \\ &= \Delta(KEK^{-1}). \end{aligned}$$

**Théorème 3.** Chaque  $U_q$ -module est semisimple, ça veut dire qu'on peut l'écrire comme somme directe finie de  $U_q$ -modules simples.

La preuve est analogue à celle de la proposition que toute représentation finie de  $\mathfrak{sl}(2)$  est une somme directe finie de représentations irréductibles. En détail, elle est donnée dans “Christian Kassel : Quantum Groups, p. 144”.

La réduction aux coefficients de Gledsch-Gordan est aussi possible pour les  $U_q$ -modules :

**Théorème 4** (Gledsch-Gordan). *Pour  $m \geq n \in \mathbb{N}$  on a*

$$V_n \otimes V_m = V_{m+n} \oplus \dots \oplus V_{m+n-2} \oplus V_{m-n}. \quad (5.26)$$

La démonstration de la formule de Gledsch-Gordan pour notre groupe quantique peut être faite de la même façon que pour le cas classique : On montre que pour tout  $0 \leq p \leq m$  il y a un vecteur de poids maximal  $q^{n+m-2p}$  dans  $V_n \otimes V_m$ . Avec ça, en regardant les dimensions, on voit que les espaces engendrés de ces vecteurs de poids maximale sont les termes de la somme du théorème.

Un autre théorème qui nous permet d’être sûr d’avoir toujours une tressation sur les  $U_q$ -modules, est le suivant :

**Théorème 5.** *L’algèbre de Hopf  $U_q$  possède une  $R$ -matrice universelle.*

Malheureusement la construction de cet  $R$ -matrice universelle, surtout pour le cas que  $q$  n’est pas une racine d’unité qui est relevant pour nous, a besoin de l’introduction et exploration d’une grande théorie qui contient par exemple les catégories rubans et les algèbres de Drinfeld-Jimbo ; elle sortirait du cadre de ce mémoire.

# Chapitre 6

## Bibliographie

- Shahn Majid : A Quantum Groups Primer, Cambridge UP 2002
- Christian Kassel : Quantum Groups, Springer (GTM) 1994
- Michio Jimbo & Tetsuji Miwa : Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models, AMS 1995
- Yuri Manin : Quantum groups and non-commutative geometry, CRM Montreal 1988
- Alain Connes : Noncommutative Geometry, Academic Press 1994
- André Joyal & Ross Street : An Introduction to Tannaka Duality and Quantum Groups, In : Lecture Notes. Category Theory, Proceedings, Como 1990, Springer 1991
- Michio Jimbo : Introduction to the Yang Baxter Equation, In : International Journal of Modern Physics A 1989